Modèles du $\lambda\mu$-calcul

Stage réalisé avec Olivier Laurent au LIP

Simon Castellan

January 13, 2014

Introduction

Modèle:

- invariant du calcul
- point de vue sur un langage

$\lambda\mu$-**calcul**:

- extension du λ-calcul à la logique classique (logique)
- extension du λ-calcul avec du contrôle (opérationnel)

Contribution:

- étude des modèles *non typés* et des modèles *intentionnels*
- les *modèles par types intersection* à la *Engeler* avec une explication par les *catégories de contrôle faibles*.

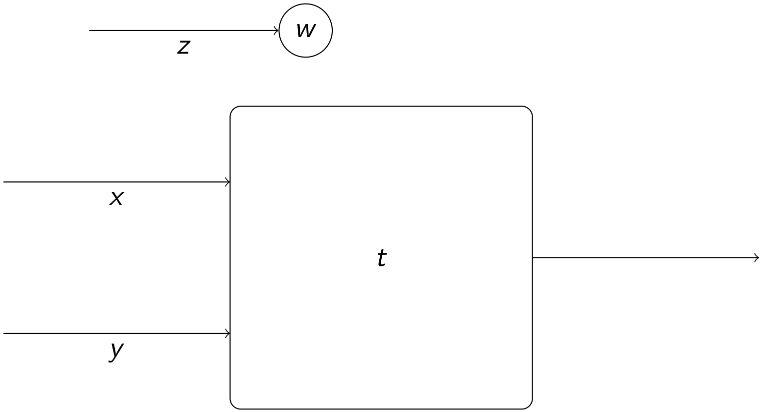
Plan

$\lambda\mu$-calcul

Types intersection pour le λ-calcul

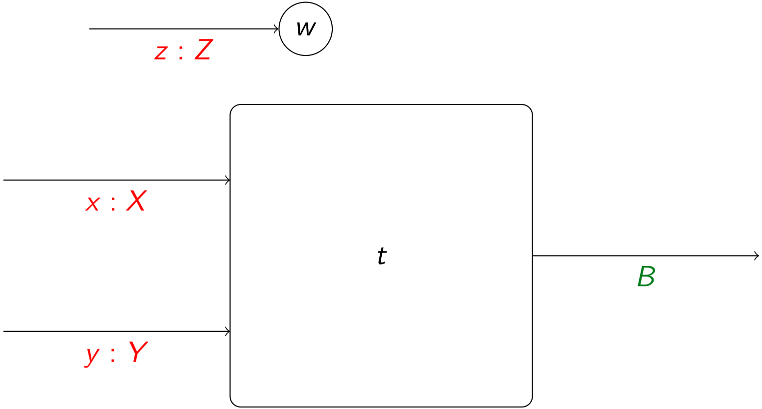
Types intersection/union pour le $\lambda\mu$-calcul

Syntaxe

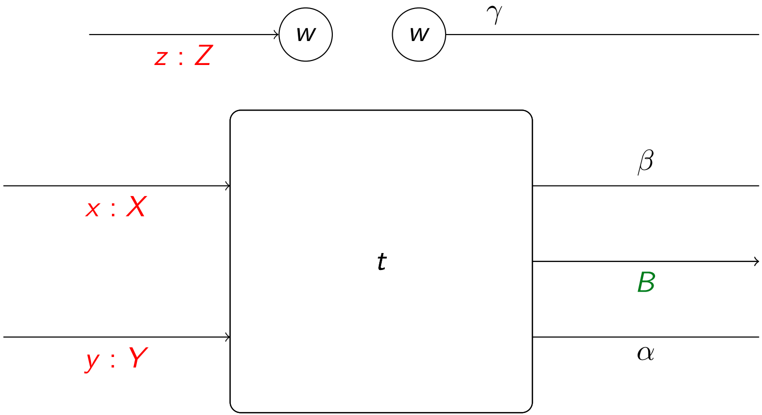


Syntaxe

$$x : X, y : Y, z : Z \vdash t : B$$

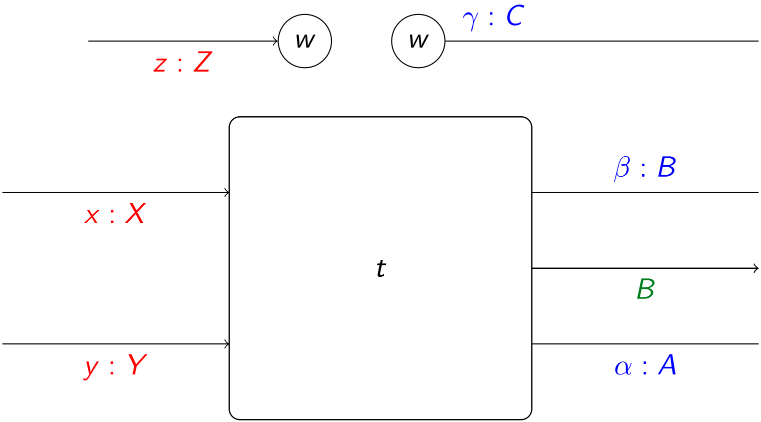


Syntaxe



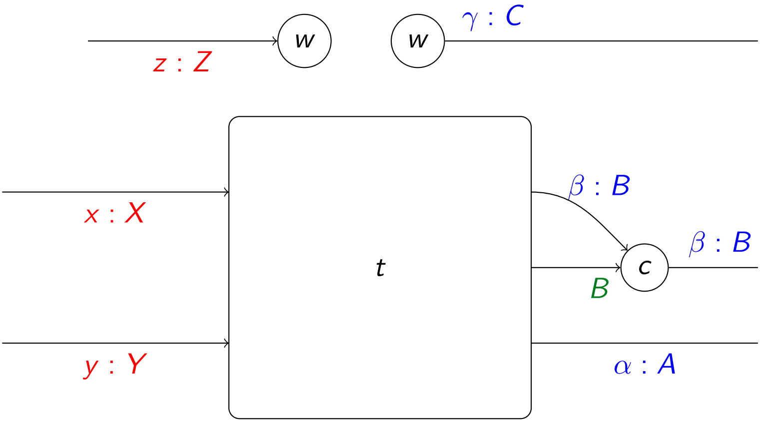
Syntaxe

$$x : X, y : Y, z : Z \vdash t : B \mid \alpha : A, \beta : B, \gamma : C$$



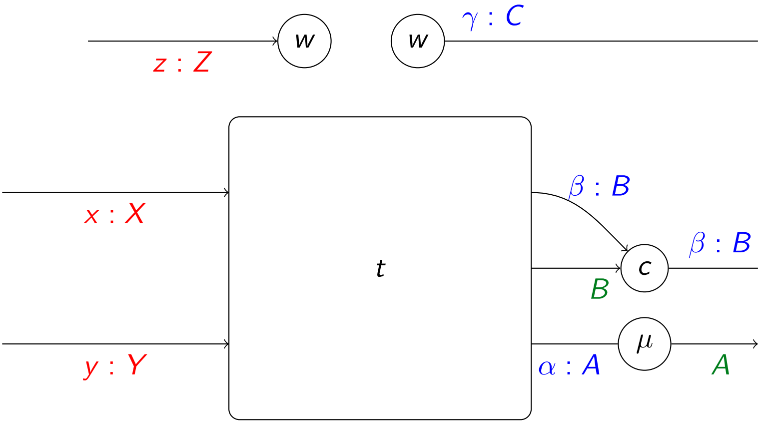
Syntaxe

$$x : X, y : Y, z : Z \vdash [\beta]t \mid \alpha : A, \beta : B, \gamma : C$$



Syntaxe

$$x : X, y : Y, z : Z \vdash \mu\alpha[\beta]t : A \mid \alpha : A, \beta : B, \gamma : C$$



$$t, u ::= x \mid \lambda x.\ t \mid t\ u \mid \mu\alpha n \qquad n ::= [\beta]t$$

Typage

Jugements

- $\Gamma \vdash t : A \mid \Delta$ et $\Gamma \vdash n \mid \Delta$

Axiome = affaiblissement à droite (et à gauche)

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A|\Delta} \quad \leftrightarrow \quad \frac{}{\Gamma, A \vdash A \mid \Delta}$$

μ = commutation sortie auxiliaire / retour

$$\frac{\Gamma \vdash n \mid \alpha : A, \Delta}{\Gamma \vdash \mu\alpha n : A \mid \Delta}\ \mu \quad \leftrightarrow \quad \frac{\Gamma \vdash \ \mid A, \Delta}{\Gamma \vdash A \mid \Delta}$$

[ ] = contraction à droite

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \mid \alpha : A, \Delta}{\Gamma \vdash [\alpha]t \mid \alpha : A, \Delta}\ \textit{raise} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\Gamma \vdash A \mid A, \Delta}{\Gamma \vdash \mid A, \Delta}$$

Exceptions lexicales

Intuition opérationelle (de [**?**])

- $\lambda\mu$-calcul $=$ λ-calcul étendu avec des exceptions lexicales

$$\mu\alpha^{A}[\beta^{B}]t \approx \texttt{try raise } (\beta, t) \texttt{ with } (\alpha, x) \to x$$

(seul le corps de t peut ainsi lever l'exception α)

$$cc = \lambda f^{(A\to B)\to A} \mu\alpha[\alpha] f(\lambda x^{A}.\mu\delta[\alpha]x)$$

Sémantique opérationelle

- réduction calculatoire:
  - on garde la β-réduction
  - $\mu\alpha\ n$ (comme callcc) capture son contexte applicatif et le propage à ses sorties:

$$(\mu) \quad (\mu\alpha n)u \to \mu\beta n\left[{}^{[\beta]v\ u}/_{[\alpha]v}\right] \quad (\beta \notin n, u)$$

  - renommage: enchaîner les μ se simplifie:

$$(\rho) \quad [\beta]\mu\alpha n \to n[\beta/\alpha]$$

- règles extensionelles
  - on garde la règle η
  - si on enchaîne écriture unique/lecture, on peut simplifier

$$(\theta) \quad \mu\alpha[\alpha]t = t \quad (\alpha \notin t)$$

Sémantique dénotationnelle

- modèle du $\lambda(\mu)$-calcul : invariant des termes vis-à-vis de $\beta(\mu\rho)$.
- modèle *extensionnel* : invariant vis-à-vis de $\eta(\theta)$
- modèle typé (= catégorie) si $\Gamma \vdash t : A(\mid \Delta)$ alors $[\![t]\!] \in [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!](\vee[\![\Delta]\!])$ et $t =_{\beta\mu\rho} t'$ entraîne $[\![t]\!] = [\![t']\!]$
- modèle non typé catégorique: un objet O et $i : [O \to O] \hookrightarrow O$

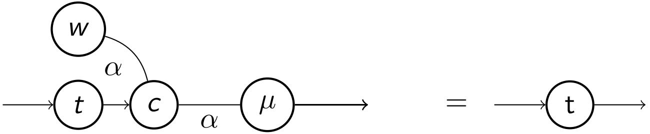
Vers des catégories de contrôle faibles

	λ-calcul	$\lambda\mu$-calcul
Extensionnel	CCC	Catégorie de contrôle
Intentionnel	semi-CCC	

Vers des catégories de contrôle faibles

	λ-calcul	$\lambda\mu$-calcul
Extensionnel	CCC	Catégorie de contrôle
Intentionnel	semi-CCC	Catégorie de contrôle faible

Enjeu des catégories de contrôle faible: θ.



Monoïdes faibles

- $\mu\alpha[\alpha]t = t \quad \Rightarrow \quad$ types sont des monoïdes
- ρ force une structure plus faible sur les types:

$$\mu\alpha[\alpha]\mu\alpha[\alpha]t = \mu\alpha[\alpha]t$$

Monoïdes faibles

- $\mu\alpha[\alpha]t = t \quad \Rightarrow \quad$ types sont des monoïdes
- ρ force une structure plus faible sur les types:

$$\mu\alpha[\alpha]\mu\alpha[\alpha]t = \mu\alpha[\alpha]t$$

Monoïde faible

Un monoïde faible est un triplet $(A, \vee, \bot)$ avec

- $\bot \in A \qquad$ et $\qquad \vee : A \times A \to A$

tels que

- $\vee$ est associative $\quad$ et $\quad \bot \vee \bot = \bot$

Catégorie de contrôle faible : types viennent avec une structure de monoïde commutatif faible (*codiagonales faibles*).

- Correction vis-à-vis de $\beta\mu\rho$
- Condition indépendantes pour valider η et θ

Modèle d'Engeler original

Types:

$$\sigma, \tau \in \mathscr{T} ::= X \mid \sigma_1 \sqcap \cdots \sqcap \sigma_n \to \tau \quad (\text{si } n = 0, \text{ on note } \Omega \to \tau)$$

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma_1 \sqcap \cdots \sqcap \sigma_n \vdash x : \sigma_i} \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma_1 \sqcap \cdots \sqcap \sigma_n \vdash t : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \sigma_1 \sqcap \cdots \sqcap \sigma_n \to \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \sigma_1 \sqcap \cdots \sqcap \sigma_n \to \tau \qquad \forall i, \Gamma \vdash u : \sigma_i}{\Gamma \vdash t\ u : \tau}$$

$$\vdash (\lambda x.xx) : (A \to B \sqcap A) \to B$$

Modèle d'Engeler original

Types:

$$\begin{aligned}\sigma, \tau \in \mathscr{T} ::= & \\ & X \\ & \mid \sigma_1 \sqcap \cdots \sqcap \sigma_n \to \tau \quad (\text{si } n = 0\text{, on note } \Omega \to \tau)\end{aligned}$$

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma_1 \sqcap \cdots \sqcap \sigma_n \vdash x : \sigma_i} \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma_1 \sqcap \cdots \sqcap \sigma_n \vdash t : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \sigma_1 \sqcap \cdots \sqcap \sigma_n \to \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \sigma_1 \sqcap \cdots \sqcap \sigma_n \to \tau \qquad \forall i, \Gamma \vdash u : \sigma_i}{\Gamma \vdash t\ u : \tau}$$

Théorème

Si t et t' sont β-équivalents, alors ils ont les mêmes types. De plus, t est normalisable de tête ssi t a au moins un type.

Interprétation catégorique

- $\Gamma \vdash t : A \mapsto [\![t]\!] : \mathscr{P}_f(\mathscr{T})^n \not\to \mathscr{T}$ (morphisme dans **Rel**)
- **Rel** n'est pas une CCC mais seulement $*$-autonome
- résultat de Seely: les morphismes de la forme $TA \to B$ dans une telle catégorie est une CCC (notée $coKl_{\mathscr{C}}(T)$) à condition que T soit une *comonade linéaire*.
- $\mathscr{P}_f$: **Rel** $\to$ **Rel** n'est pas une *comonade linéaire* mais $\mathscr{P}_f$: **Rel**$^{\leq}$ $\to$ **Rel**$^{\leq}$ oui
- T est un objet réflexif dans $coKl_{\mathbf{Rel}^{\leq}}(\mathscr{P}_f)$ via $\mathscr{P}_f(\mathscr{T}) \times \mathscr{T} \to \mathscr{T}, (\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}, \tau) \to \sigma_1 \sqcap \ldots \sqcap \sigma_n \to \tau$
- **théorème**: $\Gamma \vdash t : A$ ssi $\Gamma \xrightarrow{[\![t]\!]} A$

Un système par type intersection et type union

Système introduit par [**?**]. Types:

$$
\begin{array}{rll}
A, B \in \mathscr{T} ::= & & \textbf{types} \\
& |X & \text{atomes} \\
& |I \to A & \text{types flèche} \\
U ::= & A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n & \textbf{types union} \\
I ::= & \Omega \mid U_1 \sqcap \ldots \sqcap U_n & \textbf{types intersection}
\end{array}
$$

Jugements: $x : I \vdash t : U \mid \alpha : U$.

Le système de type

$$\frac{U \in I}{\Gamma, x : I \vdash x : U \mid \Delta} \qquad \frac{\Gamma, x : I \vdash t : U \mid \Delta}{\Gamma \vdash \lambda x.t : I \Rightarrow U \mid \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \bigsqcup_k (I_k \to A_k) \mid \Delta \qquad \forall U_i \in (I_1 \sqcap \ldots \sqcap I_n), \Gamma \vdash u : U_i \mid \Delta}{\Gamma \vdash t\ u : A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n \mid \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : U \mid \alpha : U', \Delta}{\Gamma \vdash [\alpha]t \mid \alpha : U \sqcup U', \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash n \mid \alpha : U, \Delta}{\Gamma \vdash \mu\alpha n : U | \Delta}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{x : A \vdash \mu\delta[\alpha]x \mid \alpha : A}{f : (A \to B) \to C \vdash f(\lambda x.\mu\delta[\alpha]x) : C \mid \alpha : A}}{f : (A \to B) \to C \vdash \mu\alpha[\alpha]f(\lambda x.\mu\delta[\alpha]x) : A \sqcup C}}{\vdash cc : ((A \to B) \to C) \to A \sqcup C}$$

Le système de type

$$\frac{U \in I}{\Gamma, x : I \vdash x : U \mid \Delta} \qquad \frac{\Gamma, x : I \vdash t : U \mid \Delta}{\Gamma \vdash \lambda x.t : I {\Rightarrow} U \mid \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \bigsqcup_k (I_k \to A_k) \mid \Delta \qquad \forall U_i \in (I_1 \sqcap \ldots \sqcap I_n), \Gamma \vdash u : U_i \mid \Delta}{\Gamma \vdash t\ u : A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n \mid \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : U \mid \alpha : U', \Delta}{\Gamma \vdash [\alpha]t \mid \alpha : U \sqcup U', \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash n \mid \alpha : U, \Delta}{\Gamma \vdash \mu\alpha n : U | \Delta}$$

Théorème (Laurent)

Si t et t' sont $\beta\mu\rho$-équivalents, alors ils ont les mêmes types. De plus, t est normalisable de tête ssi t a au moins un type.

Interprétation catégorique

- termes: $[\![t]\!] : \mathscr{P}_f(\mathscr{P}_f^*(\mathscr{T}))^n \nrightarrow \mathscr{P}_f^*(\mathscr{T})^{m+1} \in coKl_{\mathbf{Rel}_\leq}(\mathscr{P}_f)$
- $\mathscr{P}_f^*(\mathscr{T})$: objet réflexif via
  $I \Rightarrow (A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n) = (I \to A_1) \sqcup \ldots \sqcup (I \to A_n)$

Interprétation catégorique

- termes: $[\![t]\!] : \mathscr{P}_f(\mathscr{P}_f^*(\mathscr{T}))^n \not\rightarrow \mathscr{P}_f^*(\mathscr{T})^{m+1} \in coKl_{\mathbf{Rel}_\leq}(\mathscr{P}_f)$
- $\mathscr{P}_f^*(\mathscr{T})$: objet réflexif via
  $I \Rightarrow (A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n) = (I \to A_1) \sqcup \ldots \sqcup (I \to A_n)$
  pas injectif avec $\mathscr{P}_f(\mathscr{T})$
- $coKl(\mathscr{P}_f)$ seulement une CCC, pas une catégorie de contrôle.
- Construction d'une catégorie de contrôle faible à partir de ce cadre: via les $\mathscr{P}_f$-algèbre ([**?**]).
  $\to$ généralisation du résultat aux catégories de contrôle faible:

Interprétation catégorique

- termes: $[\![t]\!] : \mathscr{P}_f(\mathscr{P}^*_f(\mathscr{T}))^n \not\to \mathscr{P}^*_f(\mathscr{T})^{m+1} \in coKl_{\mathbf{Rel}_{\leq}}(\mathscr{P}_f)$
- $\mathscr{P}^*_f(\mathscr{T})$: objet réflexif via
  $I \Rightarrow (A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n) = (I \to A_1) \sqcup \ldots \sqcup (I \to A_n)$
  pas injectif avec $\mathscr{P}_f(\mathscr{T})$
- $coKl(\mathscr{P}_f)$ seulement une CCC, pas une catégorie de contrôle.
- Construction d'une catégorie de contrôle faible à partir de ce cadre: via les $\mathscr{P}_f$-algèbre ([**?**]).
  $\to$ généralisation du résultat aux catégories de contrôle faible:

Théorème

Si $\mathscr{C}$ est une catégorie $*$-autonome et $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ une monade linéaire dont les algèbres ont une structure de codiagonales faibles, alors la sous-catégorie de $coKl(T)$ restreinte aux T-algèbres est une catégorie de contrôle faible

Conclusion

- construction de modèles du λ et $\lambda\mu$-calcul par types intersection
- nécessité d'introduire la notion de *catégories de contrôle faibles*
- prochaine étape: types intersection avec sous-typage (voir [**?**])
- est-ce que les catégories de contrôle faible capturent tous les modèles non typés ?

Biblio

Barendregt, H., Coppo, M., and Dezani-Ciancaglini, M. (1983).
A filter lambda model and the completeness of type assignment.
The journal of symbolic logic, 48(4):931–940.

Laurent, O. (2004).
On the denotational semantics of the untyped lambda-mu calculus.
Unpublished note.

Laurent, O. and Regnier, L. (2003).
About translations of classical logic into polarized linear logic.
In *LICS*, pages 11–20.

Selinger, P. (2001).
Control categories and duality: on the categorical semantics of the lambda-mu calculus.
Mathematical Structures in Computer Science, 11(2):207–260.