

Comment un ordinateur cuisine-t-il ?

Une introduction gastronomique à la sémantique.

[[recette]] = (, , , ) \mapsto 

Simon Castellan
Labo junior Appliquer

La sémantique, késaco ?

Sémantique : attribuer du **sens** à une **description textuelle**.

Exemples :

- ▶ *linguistique* : « l'étoile du Berger » → Vénus ;
- ▶ *mathématique* : « $2+2$ » → 4.

Le langage étudié devient un *objet* appelé **syntaxe**.

Le sens attribué dépend du contexte :

- ▶ *linguistique* : un objet concret ;
- ▶ *mathématique* : un objet mathématique.

La sémantique, késaco ?

Sémantique : attribuer du **sens** à une **description textuelle**.

Exemples :

- ▶ *linguistique* : « l'étoile du Berger » \rightarrow Vénus ;
- ▶ *mathématique* : « $2+2$ » $\rightarrow 4$.

Le langage étudié devient un *objet* appelé **syntaxe**.


Le sens attribué dépend du contexte :

- ▶ *linguistique* : un objet concret ;
- ▶ *mathématique* : un objet mathématique.

En informatique, on s'intéresse aux programmes :




- ▶ *informatique* : « $x := x+1; x := x+1$ » $\rightarrow (x \mapsto x + 2)$.

Comment faire un gâteau roulé ?

Ingrédients : .

1. Cassez les oeufs en séparant les jaunes des blancs
2. Mélanger le jaune et le sucre
3. Ajouter au mélange la farine
4. Battre les blancs en neige
5. Mélangez le tout
6. Enfournez la pâte et laisser cuire.

Comment faire un gâteau roulé ?

Ingrédients :   .

1.   → ₁
2. *Pour chaque*  *dans* ₁ :  → ₂
3.  → ₂
4.  → ₂
5.   *dans* ₁
6. ₁ → ₂
7.  *dans* ₂
8. ₂ → 
9. attendre
10.  → table

Les états de la cuisine

L'exécution d'une recette : ingrédients \rightarrow résultat.

Sémantique d'une recette : transformation du contenu de la table.

Problème : comment la calculer ?

Les états de la cuisine

L'exécution d'une recette : ingrédients \rightarrow résultat.

Sémantique d'une recette : transformation du contenu de la table.

Problème : comment la calculer ?

Besoin de regarder *toute* la cuisine, pas seulement la table.

\rightarrow Notion d'**état de la cuisine** qui est :

- ▶ Le contenu de la table (ingrédients ou résultats)
- ▶ Le contenu des bols/fours ;

par ex :

$\{ \text{bowl}_1 : \text{pâte}, \text{bowl}_2 : \text{œuf} + \text{œuf} + \text{sucre} + \text{sucre} \}$

est l'atteint qu'on souhaite atteindre à la fin de l'instruction 6.

Anatomie d'une cuisson : sémantique opérationnelle

Chaque instruction modifie l'état de la cuisine. Par ex :

$$\{\text{casserole}_1 : x, \text{casserole}_2 : \text{cane}\}, \ll \text{casserole}_2 \rightarrow \text{casserole}_1 \gg \rightsquigarrow \{\text{casserole}_1 : x + \text{cane}\}$$

Règle *bureaucratique* : déplacement de bols.

D'autres règles sont « chimiques » :

$$\{\text{casserole}_1 : \text{cane} + \text{oeuf} + \text{oeuf} + \text{sucre} + \text{beurre}\}, \ll \text{mixer dans casserole}_1 \gg \rightsquigarrow \{\text{casserole}_1 : \text{galette}\}$$
$$\{\text{four} : \text{galette}\}, \ll \text{attendre} \gg \rightsquigarrow \{\text{four} : \text{galette}\}$$

En général les règles sont de la forme :

$$\{\text{état initial}\}, \text{instruction} \rightsquigarrow \{\text{état de sortie}\}.$$

Anatomie d'une cuisson : sémantique opérationnelle

Chaque instruction modifie l'état de la cuisine. Par ex :

$$\{\text{cuv}_1 : x, \text{cuv}_2 : \text{sel}\}, \ll \text{cuv}_2 \rightarrow \text{cuv}_1 \gg \rightsquigarrow \{\text{cuv}_1 : x + \text{sel}\}$$

Règle *bureaucratique* : déplacement de bols.

D'autres règles sont « chimiques » :

$$\{\text{cuv}_1 : \text{sel} + \text{œuf} + \text{œuf} + \text{sucre} + \text{beurre}\}, \ll \text{mélanger dans } \text{cuv}_1 \gg \rightsquigarrow \{\text{cuv}_1 : \text{pâte}\}$$
$$\{\text{four} : \text{pâte}\}, \ll \text{attendre} \gg \rightsquigarrow \{\text{four} : \text{gâteau}\}$$

En général les règles sont de la forme :

$$\{\text{état initial}\}, \text{instruction} \rightsquigarrow \{\text{état de sortie}\}.$$

Cette collection de *règles de calcul* est la *sémantique opérationnelle*.

L'essence d'une recette : sémantique dénotationnelle

En enchaînant les règles les unes après les autres on a :

$$\{\text{📦}, 0, 0, \text{📦}\}, \text{recette} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \{\text{🍪}\}$$

On note $\llbracket \text{recette} \rrbracket (\{\text{📦}, 0, 0, \text{📦}\}) = \{\text{🍪}\}$.

$\llbracket \text{recette} \rrbracket$ est la **sémantique dénotationnelle** de recette.

L'essence d'une recette : sémantique dénotationnelle

En enchaînant les règles les unes après les autres on a :

$$\{\text{📦}, 0, 0, \text{📦}\}, \text{recette} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \{\text{🍪}\}$$

On note $\llbracket \text{recette} \rrbracket (\{\text{📦}, 0, 0, \text{📦}\}) = \{\text{🍪}\}$.




$\llbracket \text{recette} \rrbracket$ est la **sémantique dénotationnelle** de recette.

Sémantique dénotationnelle : comportement **observable**.

Définition




Deux recettes sont **observationnellement équivalentes** si elles ont la même sémantique dénotationnelle. En d'autres termes, si à partir des mêmes ingrédients, leur exécution produit les mêmes résultats.




Des recettes équivalentes




Ingrédients :   .



1.   \rightarrow ₁
2. *Pour chaque*  *dans* ₁ :  \rightarrow ₂
3.  \rightarrow ₂
4.  \rightarrow ₂
5.   *dans* ₁
6. ₁ \rightarrow ₂
7.  *dans* ₂
8. ₂ \rightarrow 
9. attendre
10.  \rightarrow table

Des recettes équivalentes

Ingrédients :   .



1.   → ₁

2. *Pour chaque*  *dans* ₁ :  → ₂



3.  → ₂

4.   **dans** ₁


5.  → ₂

6. ₁ → ₂




7.  *dans* ₂

8. ₂ → 

9. attendre

10.  → table

Des recettes équivalentes

Ingrédients :   .

1.   → ₁
2. *Pour chaque*  *dans* ₁ :  → ₂
3.   **dans** ₁
4.  → ₂
5.  → ₂
6. ₁ → ₂
7.  *dans* ₂
8. ₂ → 
9. attendre
10.  → table

Un exemple de méta-théorème

Remarque. On peut permuter certaines instructions sans changer la sémantique. Signification ?

Un exemple de méta-théorème

Remarque. On peut permuter certaines instructions sans changer la sémantique. Signification ?

Théorème

Si dans une recette deux instructions consécutives peuvent être permuter sans changer la sémantique dénotationnelle, alors ces deux instructions peuvent être exécutées en parallèle [sans changer la sémantique].

Attention : ce n'est vrai qu'avec notre notion d'observation.
[par ex, si on compte le nombre de cuisiniers, ce n'est plus vrai.]

Une usine à gâteau roulés

recette2 :

1.   → ₁
2. *Pour chaque*  *dans* ₁ :   → ₂
3.  → ₃
4.  → ₄
5.   *dans* ₁
6. ₁ + ₂ + ₃ + ₄ → ₅
7.  *dans* ₅
8. ₅ → 
9. attendre
10.  → table

On a recette et recette2 observationnellement équivalentes.

Une usine à gâteau roulés

recette2 :

1.  → ₁
2. *Pour chaque*  *dans* ₁ :  → ₂
3.  → ₃
4.  → ₄
5.   *dans* ₁
6. ₁ + ₂ + ₃ + ₄ → ₅
7.  *dans* ₅
8. ₅ → 
9. attendre
10.  → table

On a `recette` et `recette2` observationnellement équivalentes.

`recette2` prend plus d'espace (de bols) mais est plus parallélisable.

Meilleure pour faire des gâteau en série ?

Conclusion

Sémantique : abstraction de la bureaucratie syntaxique.

Applications :

- ▶ Prouver que des optimisations sont correctes (compilateur)
- ▶ Prouver qu'un ensemble d'axiomes est non-contradictoire
- ▶ Certification automatique de logiciels.
- ▶ Une inspiration : certains langages sont inspirés de sémantiques : parfois, *la sémantique précède la syntaxe*.

Pour finir, un petit schéma de mon domaine de recherche :

