TD 2: Curry-Howard propositionnel

simon.castellan@ens-lyon.fr

On considère dans ce TD le λ-calcul simplement typé avec produits dont la grammaire est donnée par :

$$t, u ::= x \mid \lambda x^A.\ t \mid t\ u \mid (t,\ u) \mid \pi_1 t \mid \pi_2 t$$

On définit l'alias $\lambda(x^A, y^B).\ t$ qui signifie :

$$\lambda z^{A\times B}.\ t[\pi_1 z/x, \pi_2 z/y]$$

qui permet d'abstraire de manière concise sur un produit (équivalent du caml `(fun (x, y) -> t)`)

Exercice 1 *Une double dose de négation*

Montrer les théorèmes suivants en déduction naturelle intuitionniste :

Double_neg $P \Rightarrow \neg\neg P$,

Ex_middle $\neg\neg(P \vee \neg P)$,

Or_intro $\neg\neg P \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)$,

Or_elim $\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \Rightarrow R) \Rightarrow \neg\neg(Q \Rightarrow R) \Rightarrow \neg\neg R$.

Imp_intro $(P \Rightarrow \neg\neg Q) \Rightarrow \neg\neg(P \Rightarrow Q)$,

Imp_elim $\neg\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg\neg P \Rightarrow \neg\neg Q$,

And_intro $\neg\neg P \Rightarrow \neg\neg Q \Rightarrow \neg\neg(P \wedge Q)$,

And_elim $\neg\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg\neg P$.

Exercice 2 *Théorème de Glivenko*

Démontrer l'énoncé suivant : $NK \vdash A \quad \Rightarrow NJ \vdash \neg\neg A$.

Ce qui signifie : Si la logique classique NK prouve une formule A alors, la logique intuitioniste NJ prouve sa double négation.

Exercice 3 *Le côté calculatoire de la preuve*

Donner les λ-termes correspondant aux preuves écrites à l'exercice 1 des formules suivantes :

— $P \Rightarrow \neg\neg P$,

— $\neg\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg\neg P \Rightarrow \neg\neg Q$,

— $\neg\neg P \Rightarrow \neg\neg Q \Rightarrow \neg\neg(P \wedge Q)$,

— $\neg\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg\neg P$

Exercice 4 *Jusqu'à combien peut-on compter en λ-calcul simplement typé ?*

On rappelle l'encodage de Church vu au TD précédent. L'entier n est codé par le terme $\overline{n} = \lambda f.\ \lambda x.\ f^n\ x$.

Étant donné une variable de type α, on peut attribuer à ces termes le type nat $= (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$.

Un terme t de type $(\text{nat})^k \to \text{nat}$ représente la fonction mathématique $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a que $t\ (\overline{n}_1, \ldots, \overline{n_p})$ se normalise en l'entier $f(n_1, \ldots, n_p)$. Une fonction $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ est représentable si il existe un terme la représentant.

1. Toutes les fonctions $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sont-elles représentables ?
2. Montrer que la classe des fonctions représentables est close par composition et contient les fonctions constantes, les projections, l'addition, la multiplication et la conditionelle $\text{cond} : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ définie par

$$\text{cond}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} n_2 & \text{si } n_1 = 0 \\ n_3 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Rappeler la caractérisation des formes β-normales des termes du λ-calcul.
4. Soit M un λ-terme tel que $f : \alpha \to \alpha, a_1 : \text{nat}, \ldots, a_p : \text{nat}, x_1 : \alpha, \ldots, x_m : \alpha \vdash M : \alpha$. Montrer, par induction sur la forme normale de M qu'il existe un polynôme $P(n_1, \ldots, n_p)$ et $i \leq m$ tel que

$$M[\overline{n_1}/a_1, \ldots, \overline{n_p}/a_p] =_\beta f^{P(n_1,\ldots,n_p)} x_i$$

pour tout tuple d'entiers **non nuls** $(n_1, \ldots, n_p)$.
5. Montrer que la classe des fonctions représentables est exactement le plus petit ensemble contenant les projections, addition, multiplication, conditionelle et clos par composition.

DM 1 : Théorème de Glivenko

Formaliser le théorème de Glivenko en Coq. Un fichier de template est disponible à l'adresse : `http://iso.mor.phis.me/teaching/2014-2015/preuves/dm1/dm1.v`

Le DM est à rendre pour le mardi 7 octobre 2014. Vous pouvez vous mettre en binôme (mais ce n'est pas obligatoire) si vous le souhaitez.