

TD 2: Curry-Howard propositionnel

simon.castellan@ens-lyon.fr

On considère dans ce TD le λ -calcul simplement typé avec produits dont la grammaire est donnée par :

$$t, u ::= x \mid \lambda x^A. t \mid t u \mid (t, u) \mid \pi_1 t \mid \pi_2 t$$

On définit l'alias $\lambda(x^A, y^B). t$ qui signifie :

$$\lambda z^{A \times B}. t[\pi_1 z/x, \pi_2 z/y]$$

qui permet d'abstraire de manière concise sur un produit (équivalent du caml `(fun (x, y) -> t)`)

Exercice 1 *Une double dose de négation*

Montrer les théorèmes suivants en déduction naturelle intuitionniste :

Double_neg $P \Rightarrow \neg\neg P$,

Ex_middle $\neg\neg(P \vee \neg P)$,

Or_intro $\neg\neg P \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)$,

Or_elim $\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \Rightarrow R) \Rightarrow \neg\neg(Q \Rightarrow R) \Rightarrow \neg\neg R$.

Imp_intro $(P \Rightarrow \neg\neg Q) \Rightarrow \neg\neg(P \Rightarrow Q)$,

Imp_elim $\neg\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg\neg P \Rightarrow \neg\neg Q$,

And_intro $\neg\neg P \Rightarrow \neg\neg Q \Rightarrow \neg\neg(P \wedge Q)$,

And_elim $\neg\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg\neg P$.

Exercice 2 *Théorème de Glivenko*

Démontrer l'énoncé suivant : $NK \vdash A \Rightarrow NJ \vdash \neg\neg A$.

Ce qui signifie : Si la logique classique NK prouve une formule A alors, la logique intuitionniste NJ prouve sa double négation.

Exercice 3 *Le côté calculatoire de la preuve*

Donner les λ -termes correspondant aux preuves écrites à l'exercice 1 des formules suivantes :

— $P \Rightarrow \neg\neg P$,

— $\neg\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg\neg P \Rightarrow \neg\neg Q$,

— $\neg\neg P \Rightarrow \neg\neg Q \Rightarrow \neg\neg(P \wedge Q)$,

— $\neg\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg\neg P$

Exercice 4 *Jusqu'à combien peut-on compter en λ -calcul simplement typé ?*

On rappelle l'encodage de Church vu au TD précédent. L'entier n est codé par le terme $\bar{n} = \lambda f. \lambda x. f^n x$.

Étant donné une variable de type α , on peut attribuer à ces termes le type $\text{nat} = (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$.

Un terme t de type $(\text{nat})^k \rightarrow \text{nat}$ représente la fonction mathématique $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a que $t(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_p})$ se normalise en l'entier $f(n_1, \dots, n_p)$. Une fonction $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ est représentable si il existe un terme la représentant.

1. Toutes les fonctions $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ sont-elles représentables ?
2. Montrer que la classe des fonctions représentables est close par composition et contient les fonctions constantes, les projections, l'addition, la multiplication et la conditionnelle $\text{cond} : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$\text{cond}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} n_2 & \text{si } n_1 = 0 \\ n_3 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Rappeler la caractérisation des formes β -normales des termes du λ -calcul.
4. Soit M un λ -terme tel que $f : \alpha \rightarrow \alpha, a_1 : \text{nat}, \dots, a_p : \text{nat}, x_1 : \alpha, \dots, x_m : \alpha \vdash M : \alpha$. Montrer, par induction sur la forme normale de M qu'il existe un polynôme $P(n_1, \dots, n_p)$ et $i \leq m$ tel que

$$M[\overline{n_1}/a_1, \dots, \overline{n_p}/a_p] =_{\beta} f^{P(n_1, \dots, n_p)} x_i$$

pour tout tuple d'entiers **non nuls** (n_1, \dots, n_p) .

5. Montrer que la classe des fonctions représentables est exactement le plus petit ensemble contenant les projections, addition, multiplication, conditionnelle et clos par composition.

DM 1 : Théorème de Glivenko

Formaliser le théorème de Glivenko en Coq. Un fichier de template est disponible à l'adresse : <http://iso.mor.phis.me/teaching/2014-2015/preuves/dm1/dm1.v>

Le DM est à rendre pour le mardi 7 octobre 2014. Vous pouvez vous mettre en binôme (mais ce n'est pas obligatoire) si vous le souhaitez.

Solutions

► **Exercise 1** Pour $P \Rightarrow \neg\neg P$:

$$\frac{\frac{\frac{P, \neg P \vdash P \Rightarrow \perp}{P, \neg P \vdash \perp}}{P \vdash \neg\neg P}}{\vdash P \Rightarrow \neg\neg P}$$

Pour $\neg\neg(P \vee \neg P)$:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\neg(P \vee \neg P), P \vdash \neg(P \vee \neg P)}{\neg(P \vee \neg P), P \vdash \perp}}{\neg(P \vee \neg P) \vdash P \Rightarrow \perp}}{\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P}}{\neg(P \vee \neg P) \vdash \perp}}{\vdash \neg\neg(P \vee \neg P)}$$

Pour $\neg\neg P \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)$:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{P, \neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg(P \vee Q)}{P, \neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash P \vee Q}}{P, \neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \perp}}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg P}}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \perp}}{\neg\neg P \vdash \neg\neg(P \vee Q)}}{\vdash \neg\neg P \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)}$$

Pour $\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \Rightarrow R) \Rightarrow \neg\neg(Q \Rightarrow R) \Rightarrow \neg\neg R$. On note $\Gamma = \neg(P \vee Q), \neg\neg(P \Rightarrow R), \neg\neg(Q \Rightarrow R)$. En omettant les \Rightarrow -initiales, et les prémisses axiomes d'un *modus ponens*, on a

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\Gamma, \neg R, P, P \Rightarrow R \vdash P}{\Gamma, \neg R, P, P \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow R}}{\Gamma, \neg R, P, P \Rightarrow R \vdash R}}{\Gamma, \neg R, P, P \Rightarrow R \vdash \perp}}{\Gamma, \neg R, P \vdash \neg(P \Rightarrow R)}}{\Gamma, \neg R, P \vdash \perp}}{\frac{\frac{\frac{\Gamma, \neg R, P, P \Rightarrow R \vdash \neg R}{\Gamma, \neg R, P \vee Q \vdash \perp}}{\Gamma, \neg R \vdash \neg(P \vee Q)}}{\Gamma, \neg R \vdash \perp}}{\Gamma \vdash \neg\neg R}}$$

Pour $(P \Rightarrow \neg\neg Q) \Rightarrow \neg\neg(P \Rightarrow Q)$:

$$\begin{array}{c}
\frac{P, P, Q, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash Q}{P, Q, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash P \Rightarrow Q} \\
\frac{P, Q, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash \perp}{P, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash \neg Q} \\
\frac{P, P \Rightarrow \neg\neg Q, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash P}{P, P \Rightarrow \neg\neg Q, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash \perp} \\
\frac{P, P \Rightarrow \neg\neg Q, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash Q}{P \Rightarrow \neg\neg Q, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash P \Rightarrow Q} \\
\frac{P \Rightarrow \neg\neg Q, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash \perp}{P \Rightarrow \neg\neg Q \vdash \neg\neg(P \Rightarrow Q)}
\end{array}$$

Pour $\neg\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg\neg P \Rightarrow \neg\neg Q$:

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q, P, P \Rightarrow Q \vdash P \Rightarrow Q \quad \neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q, P, P \Rightarrow Q \vdash P}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q, P, P \Rightarrow Q \vdash Q} \\
\frac{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q, P, P \Rightarrow Q \vdash Q}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q, P, P \Rightarrow Q \vdash \perp} \\
\frac{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q, P \Rightarrow Q \vdash \neg P}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q, P \Rightarrow Q \vdash \perp} \\
\frac{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q \vdash \neg(P \Rightarrow Q)}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q \vdash \perp} \\
\frac{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q \vdash \perp}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P \vdash \neg\neg Q}
\end{array}$$

Pour $\neg\neg P \Rightarrow \neg\neg Q \Rightarrow \neg\neg(P \wedge Q)$:

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg(P \wedge Q), \neg\neg P, \neg\neg Q, P, Q \vdash Q \quad \neg(P \wedge Q), \neg\neg P, \neg\neg Q, P, Q \vdash P}{\neg(P \wedge Q), \neg\neg P, \neg\neg Q, P, Q \vdash P \wedge Q} \\
\frac{\neg(P \wedge Q), \neg\neg P, \neg\neg Q, P, Q \vdash \perp}{\neg(P \wedge Q), \neg\neg P, \neg\neg Q, P \vdash \neg Q} \\
\frac{\neg(P \wedge Q), \neg\neg P, \neg\neg Q, P \vdash \perp}{\neg(P \wedge Q), \neg\neg P, \neg\neg Q \vdash \neg P} \\
\frac{\neg(P \wedge Q), \neg\neg P, \neg\neg Q \vdash \perp}{\neg\neg P, \neg\neg Q \vdash \neg\neg(P \wedge Q)}
\end{array}$$

Pour $\neg\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg\neg P$:

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg P, \neg\neg(P \wedge Q), P \wedge Q \vdash P}{\neg P, \neg\neg(P \wedge Q), P \wedge Q \vdash \perp} \\
\frac{\neg P, \neg\neg(P \wedge Q) \vdash \neg(P \wedge Q)}{\neg P, \neg\neg(P \wedge Q) \vdash \perp} \\
\frac{\neg P, \neg\neg(P \wedge Q) \vdash \perp}{\neg\neg(P \wedge Q) \vdash P}
\end{array}$$

► **Exercice 2** Il suffit de procéder par induction sur la preuve de A en utilisant les résultats de l'exercice 1 et en généralisant avec un contexte à gauche ($\Gamma \vdash_{NK} A \Rightarrow \Gamma \vdash_{NJ} \neg\neg A$)

► **Exercice 3**

- $\lambda x^P. \lambda k^{\neg P}. kx$
- $\lambda k_f^{\neg\neg(P \Rightarrow Q)}. \lambda k_x^{\neg\neg P}. \lambda k^{\neg Q}. k_f(\lambda f^{P \Rightarrow Q}. k_x(\lambda x^P. k(fx)))$
- $\lambda k_x^{\neg\neg P}. \lambda k_y^{\neg\neg Q}. \lambda k^{\neg(P \wedge Q)}. k_x(\lambda x. k_y(\lambda y. k(x, y)))$
- $\lambda k_p^{\neg\neg(P \wedge Q)}. \lambda k^{\neg P}. k_p(\lambda(x, y). kx)$

Solutions

► **Exercise 1** Pour $P \Rightarrow \neg\neg P$:

$$\frac{\frac{\frac{P, \neg P \vdash P \Rightarrow \perp \quad P, \neg P \vdash P}{P, \neg P \vdash \perp}}{P \vdash \neg\neg P}}{\vdash P \Rightarrow \neg\neg P}$$

Pour $\neg\neg(P \vee \neg P)$:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\neg(P \vee \neg P), P \vdash \neg(P \vee \neg P) \quad \frac{\neg(P \vee \neg P), P \vdash P}{\neg(P \vee \neg P), P \vdash P \vee \neg P}}{\neg(P \vee \neg P), P \vdash \perp}}{\neg(P \vee \neg P) \vdash P \Rightarrow \perp}}{\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P}}{\frac{\neg(P \vee \neg P) \vdash \perp}{\vdash \neg\neg(P \vee \neg P)}}$$

Pour $\neg\neg P \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)$:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{P, \neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash P \quad \frac{P, \neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash P \vee Q}{P, \neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash P \vee Q}}{P, \neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \perp}}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg P}}{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \neg\neg P}}{\frac{\frac{\neg(P \vee Q), \neg\neg P \vdash \perp}{\neg\neg P \vdash \neg\neg(P \vee Q)}}{\vdash \neg\neg P \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)}}$$

Pour $\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \Rightarrow R) \Rightarrow \neg\neg(Q \Rightarrow R) \Rightarrow \neg\neg R$. On note $\Gamma = \neg(P \vee Q), \neg\neg(P \Rightarrow R), \neg\neg(Q \Rightarrow R)$. En omettant les \Rightarrow -initiales, et les prémisses axiomes d'un *modus ponens*, on a

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\Gamma, \neg R, P, P \Rightarrow R \vdash P \quad \Gamma, \neg R, P, P \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow R}{\Gamma, \neg R, P, P \Rightarrow R \vdash R}}{\Gamma, \neg R, P, P \Rightarrow R \vdash \perp}}{\Gamma, \neg R, P \vdash \neg(P \Rightarrow R)}}{\Gamma, \neg R, P \vdash \perp}}{\frac{\Gamma, \neg R, P, P \Rightarrow R \vdash \neg R}{\Gamma, \neg R, P \vee Q \vdash \perp}}}{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma, Q \vdash \perp}}{\Gamma, \neg R \vdash \perp}}{\Gamma \vdash \neg\neg R}}$$

Pour $(P \Rightarrow \neg\neg Q) \Rightarrow \neg\neg(P \Rightarrow Q)$:

$$\begin{array}{c}
\frac{P, P, Q, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash Q}{P, Q, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash P \Rightarrow Q} \\
\frac{P, Q, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash \perp}{P, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash \neg Q} \\
\frac{P, P \Rightarrow \neg\neg Q, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash P}{P, P \Rightarrow \neg\neg Q, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash \perp} \\
\frac{P, P \Rightarrow \neg\neg Q, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash Q}{P \Rightarrow \neg\neg Q, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash P \Rightarrow Q} \\
\frac{P \Rightarrow \neg\neg Q, \neg(P \Rightarrow Q) \vdash \perp}{P \Rightarrow \neg\neg Q \vdash \neg\neg(P \Rightarrow Q)}
\end{array}$$

Pour $\neg\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg\neg P \Rightarrow \neg\neg Q$:

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q, P, P \Rightarrow Q \vdash P \Rightarrow Q \quad \neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q, P, P \Rightarrow Q \vdash P}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q, P, P \Rightarrow Q \vdash Q} \\
\frac{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q, P, P \Rightarrow Q \vdash \perp}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q, P, P \Rightarrow Q \vdash \neg P} \\
\frac{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q, P, P \Rightarrow Q \vdash \perp}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q, P \Rightarrow Q \vdash \perp} \\
\frac{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q, P \Rightarrow Q \vdash \perp}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q \vdash \neg(P \Rightarrow Q)} \\
\frac{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P, \neg Q \vdash \perp}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), \neg\neg P \vdash \neg\neg Q}
\end{array}$$

Pour $\neg\neg P \Rightarrow \neg\neg Q \Rightarrow \neg\neg(P \wedge Q)$:

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg(P \wedge Q), \neg\neg P, \neg\neg Q, P, Q \vdash Q \quad \neg(P \wedge Q), \neg\neg P, \neg\neg Q, P, Q \vdash P}{\neg(P \wedge Q), \neg\neg P, \neg\neg Q, P, Q \vdash P \wedge Q} \\
\frac{\neg(P \wedge Q), \neg\neg P, \neg\neg Q, P, Q \vdash \perp}{\neg(P \wedge Q), \neg\neg P, \neg\neg Q, P \vdash \neg Q} \\
\frac{\neg(P \wedge Q), \neg\neg P, \neg\neg Q, P \vdash \perp}{\neg(P \wedge Q), \neg\neg P, \neg\neg Q \vdash \neg P} \\
\frac{\neg(P \wedge Q), \neg\neg P, \neg\neg Q \vdash \perp}{\neg\neg P, \neg\neg Q \vdash \neg\neg(P \wedge Q)}
\end{array}$$

Pour $\neg\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg\neg P$:

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg P, \neg\neg(P \wedge Q), P \wedge Q \vdash P}{\neg P, \neg\neg(P \wedge Q), P \wedge Q \vdash \perp} \\
\frac{\neg P, \neg\neg(P \wedge Q) \vdash \neg(P \wedge Q)}{\neg P, \neg\neg(P \wedge Q) \vdash \perp} \\
\frac{\neg P, \neg\neg(P \wedge Q) \vdash \perp}{\neg\neg(P \wedge Q) \vdash P}
\end{array}$$

► **Exercice 2** Il suffit de procéder par induction sur la preuve de A en utilisant les résultats de l'exercice 1 et en généralisant avec un contexte à gauche ($\Gamma \vdash_{NK} A \Rightarrow \Gamma \vdash_{NJ} \neg\neg A$)

► **Exercice 3**

- $\lambda x^P. \lambda k^{-P}. kx$
- $\lambda k_f^{\neg\neg(P \Rightarrow Q)}. \lambda k_x^{\neg\neg P}. \lambda k^{-Q}. k_f(\lambda f^{P \Rightarrow Q}. k_x(\lambda x^P. k(fx)))$
- $\lambda k_x^{\neg\neg P}. \lambda k_y^{\neg\neg Q}. \lambda k^{\neg(P \wedge Q)}. k_x(\lambda x. k_y(\lambda y. k(x, y)))$
- $\lambda k_p^{\neg\neg(P \wedge Q)}. \lambda k^{-P}. k_p(\lambda(x, y). kx)$