

TD 3: Curry-Howard propositionnel avec sommes

simon.castellan@ens-lyon.fr

On considère dans ce TD le λ -calcul simplement typé avec produits et sommes dont la grammaire est donnée par :

$$t, u ::= x \mid \lambda x^A. t \mid t u \mid (t, u) \mid \pi_1 t \mid \pi_2 t \\ \mid i_1(t) \mid i_2(t) \mid \text{case } t \text{ in } \{ i_1(x^A) \mapsto u_1, i_2(y^B) \mapsto u_2 \}$$

On rappelle la règle de typage du case (qui correspond à l'élimination de \vee) :

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \vee B \quad \Gamma, x : A \vdash u : C \quad \Gamma, y : B \vdash v : C}{\Gamma \vdash \text{case } t \text{ in } \{ i_1(x^A) \mapsto u, i_2(y^B) \mapsto v \} : C}$$

Exercice 1 *Plus de Curry-Howard*

Pour chacun des types suivant, donnez un λ -terme de ce type :

- (Functorialité de \neg) : $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B$
- $\neg\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg\neg A$
- $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
- $A \vee B \Rightarrow B \vee A$
- $A \vee A \Rightarrow A$
- $((A \vee B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
- $(A \wedge B) \vee C \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
- $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee C$
- $\neg\neg(A \vee \neg A)$

Exercice 2 *Un peu de Coq*

Cf. le fichier <http://iso.mor.phis.me/teaching/2014-2015/preuves/td3/td3.v>

Exercice 3 *Jusqu'à combien peut-on compter en λ -calcul simplement typé ?*

On rappelle l'encodage de Church vu au TD précédent. L'entier n est codé par le terme $\bar{n} = \lambda f. \lambda x. f^n x$.

Étant donné une variable de type α , on peut attribuer à ces termes le type $\text{nat} = (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$.

Un terme t de type $(\text{nat})^k \rightarrow \text{nat}$ représente la fonction mathématique $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a que $t(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_p)$ se normalise en l'entier $f(n_1, \dots, n_p)$. Une fonction $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ est représentable si il existe un terme la représentant.

1. Toutes les fonctions $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ sont-elles représentables ?
2. Montrer que la classe des fonctions représentables est close par composition et contient les fonctions constantes, les projections, l'addition, la multiplication et la conditionnelle $\text{cond} : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$\text{cond}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} n_2 & \text{si } n_1 = 0 \\ n_3 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Rappeler la caractérisation des formes β -normales des termes du λ -calcul.
4. Soit M un λ -terme tel que $f : \alpha \rightarrow \alpha, a_1 : \text{nat}, \dots, a_p : \text{nat}, x_1 : \alpha, \dots, x_m : \alpha \vdash M : \alpha$. Montrer, par induction sur la forme normale de M qu'il existe un polynôme $P(n_1, \dots, n_p)$ et $i \leq m$ tel que

$$M[\overline{n_1}/a_1, \dots, \overline{n_p}/a_p] =_{\beta} f^{P(n_1, \dots, n_p)} x_i$$

pour tout tuple d'entiers **non nuls** (n_1, \dots, n_p) .

5. Montrer que la classe des fonctions représentables est exactement le plus petit ensemble contenant les projections, addition, multiplication, conditionnelle et clos par composition.