TD 3: Curry-Howard propositionnel avec sommes

simon.castellan@ens-lyon.fr

On considère dans ce TD le λ-calcul simplement typé avec produits et sommes dont la grammaire est donnée par :

$$\begin{aligned} t, u ::= x \mid \lambda x^A.\ t \mid t\ u \mid (t,\ u) \mid \pi_1 t \mid \pi_2 t \\ \mid i_1(t) \mid i_2(t) \mid \text{case } t \text{ in } \{\ i_1(x^A) \mapsto u_1, i_2(y^B) \mapsto u_2\ \} \end{aligned}$$

On rappelle la règle de typage du case (qui correspond à l'élimination de $\vee$) :

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \vee B \qquad \Gamma, x : A \vdash u : C \qquad \Gamma, y : B \vdash v : C}{\Gamma \vdash \text{case } t \text{ in } \{\ i_1(x^A) \mapsto u, i_2(y^B) \mapsto v\ \} : C}$$

Exercice 1 *Plus de Curry-Howard*

Pour chacun des types suivant, donnez un λ-terme de ce type :

- (Functorialité de $\neg\neg$) : $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B$
- $\neg\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg\neg A$
- $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
- $A \vee B \Rightarrow B \vee A$
- $A \vee A \Rightarrow A$
- $((A \vee B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
- $(A \wedge B) \vee C \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
- $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee C$
- $\neg\neg(A \vee \neg A)$

Exercice 2 *Un peu de Coq*

Cf. le fichier `http://iso.mor.phis.me/teaching/2014-2015/preuves/td3/td3.v`

Exercice 3 *Jusqu'à combien peut-on compter en λ-calcul simplement typé ?*

On rappelle l'encodage de Church vu au TD précédent. L'entier n est codé par le terme $\overline{n} = \lambda f.\ \lambda x.\ f^n\ x$.

Étant donné une variable de type α, on peut attribuer à ces termes le type $\text{nat} = (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$.

Un terme t de type $(\text{nat})^k \to \text{nat}$ représente la fonction mathématique $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a que $t\ (\overline{n}_1, \ldots, \overline{n_p})$ se normalise en l'entier $f(n_1, \ldots, n_p)$. Une fonction $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ est représentable si il existe un terme la représentant.

1. Toutes les fonctions $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sont-elles représentables ?
2. Montrer que la classe des fonctions représentables est close par composition et contient les fonctions constantes, les projections, l'addition, la multiplication et la conditionelle cond : $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ définie par

$$\text{cond}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} n_2 & \text{si } n_1 = 0 \\ n_3 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Rappeler la caractérisation des formes β-normales des termes du λ-calcul.
4. Soit M un λ-terme tel que $f : \alpha \to \alpha, a_1 : \mathrm{nat}, \ldots, a_p : \mathrm{nat}, x_1 : \alpha, \ldots, x_m : \alpha \vdash M : \alpha$. Montrer, par induction sur la forme normale de M qu'il existe un polynôme $P(n_1, \ldots, n_p)$ et $i \leq m$ tel que

$$M[\overline{n_1}/a_1, \ldots, \overline{n_p}/a_p] =_\beta f^{P(n_1,\ldots,n_p)} x_i$$

   pour tout tuple d'entiers **non nuls** $(n_1, \ldots, n_p)$.
5. Montrer que la classe des fonctions représentables est exactement le plus petit ensemble contenant les projections, addition, multiplication, conditionelle et clos par composition.

Solutions

▶ **Exercise 1**

- cmap $= \lambda f^{A \Rightarrow B}.\ \lambda k_x^{\neg\neg A}.\ \lambda k^{\neg B}.\ k_x\ (\lambda x^A.\ k\ (f\ x))$
- cmap$(\lambda(x,y).\ x)$ ou $\lambda k_z^{\neg\neg(A \wedge B)}.\ \lambda k^{\neg A}.\ k_z(\lambda(x^A, y^B).\ k\ x)$
- $\lambda z^{A \vee B}.$ case z in $\{\ i_1(x^A) \mapsto i_2 x, i_2(y^B) \mapsto i_1 y\ \}$
- $\lambda z^{A \vee A}.$ case z in $\{\ i_1(x^A) \mapsto x, i_2(y^A) \mapsto y\ \}$
- $\lambda f^{(A \vee B) \Rightarrow C}.\ (\lambda x^A. f\ (i_1(x)), \lambda y^B.\ f\ (i_2(y)))$
- $\lambda z^{(A \wedge B) \vee C}.$ case t in $\{\ i_1(z^{A \wedge B}) \mapsto (i_1(\pi_1 z), i_2(\pi_2)), i_2(z^C) \mapsto (z, z)\ \}$
- $\lambda(w^{A \vee C}, z^{B \vee C}).$ case w in $\{\ i_1(x^A) \mapsto$ case z in $\{\ i_1(y^B) \mapsto i_1(x,y), i_2(y^C) \mapsto i_2 y\ \}, i_2(y^C) \mapsto i_2 y\ \}$
- $\lambda z^{\neg(A \vee \neg A)}.z\ (i_2(\lambda x^A.z(i_1(x))))$